



TITLE:

G-作用のある多様体上の横断的楕円型作用素の指数とV-多様体上の楕円型作用素の指数 (多様体上の群作用と同変ホモトピー論)

AUTHOR(S):

川崎, 徹郎

CITATION:

川崎, 徹郎. G-作用のある多様体上の横断的楕円型作用素の指数とV-多様体上の楕円型作用素の指数 (多様体上の群作用と同変ホモトピー論). 数理解析研究所講究録 1979, 365: 46-64

ISSUE DATE:

1979-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104589>

RIGHT:

G -作用のある多様体上の横断的楕円型作用素
の指数と V -多様体上の楕円型作用素の指数

学習院大学 理学部 川崎徹郎

1. 有限群の場合 (Atiyah-Singer の定理)

G を有限群, M を G が滑らかに作用している閉多様体とする.
3. M 上に 2 つの G -同変複素ベクトル束 E, F と G -不変楕円型擬微分作用素 $P: C^\infty(M; E) \rightarrow C^\infty(M; F)$ が与えられたとする. $\ker P$ は作用素 P の核 (零空間) 及び余核は G の有限次元表現になる. この 2 つの表現の指標の差を楕円型作用素 P の G -指数 $\text{ind}_G P$ と呼ぶ.

$$\text{ind}_G P = \text{char} [\text{Kernel } P] - \text{char} [\text{Coker } P] \in R(G).$$

G -指数は G -不変楕円型作用素の同変ホモトピー類にしか依らない. 作用素 P は主表象 $\sigma(P)$ を定めるが, $\sigma(P)$ を余接ベクトル束 T^*M 上の台コンパクトな差束と考える時, 安定同値類

$[\sigma(P)] \in K_G(\tau M)$ とする (計量により $K_G(\tau M) \simeq K_G(\tau^* M)$ と同一視していい). この時, G -指数は $[\sigma(P)] \in K_G(\tau M)$ に対し, $\text{ind}_G P \in R(G)$ と対応させることにより, 単同型.

$$\text{ind}_G : K_G(\tau M) \longrightarrow R(G)$$

と定めていい. $u \in K_G(\tau M)$ に対し, $\text{ind}_G u \in R(G)$ は G 上の滑らかな関数である. 従って $g \in G$ に於て値 $(\text{ind}_G u)(g)$ が定まるが, Atiyah-Singer の定理はこの値を τM^g 上の u 及び $\tau M/M^g$ の特性類の積分として表わしている.

$$(\text{ind}_G u)(g) = (-1)^{\dim M^g} \langle \text{ch}^g(u), \mathcal{Q}^g(M), [\tau M^g] \rangle$$

ここで特性類 $\text{ch}^g(u) \in H_c^*(\tau M^g; \mathbb{C})$, $\mathcal{Q}^g(M) \in H^*(M^g; \mathbb{C})$ の定義を思い出そう. $u \in K_G(\tau M)$ に対し $u|_{\tau M^g}$ は τM^g 上の安定ベクトル束と思う. 元 $g \in G$ の作用は底空間を動かさないから, g は $u|_{\tau M^g}$ の繊維を固有空間に分解し, 直和分解

$$u|_{\tau M^g} = \bigoplus_{0 \leq \theta < 2\pi} u_g^\theta \quad (u_g^\theta \text{ は固有値 } e^{i\theta} \text{ の固有空間.})$$

と与える. 今, 特性類 ch^0 と

$$ch^0(\xi) = \sum_{j=1}^k e^{x_j + i\theta} \quad (c(\xi) = \prod_{j=1}^k (1 + x_j))$$

で定義すると, $ch^g(u) \in H_c^*(\tau M^g; \mathbb{C})$ は

$$ch^g(u) = \sum_{0 \leq \theta < 2\pi} ch^0(u_g^\theta)$$

で与えられる. 実ベクトル束 $\tau M|_{M^g}$ は g の作用により次の様に分解する.

$$\tau M|_{M^g} = \tau M^g \oplus \bigoplus_{0 < \theta < \pi} V_g^\theta$$

$$\left(\begin{array}{l} V_g^\theta \quad (0 < \theta < \pi) \text{ は複素ベクトル束で, } g \text{ は } e^{i\theta} \text{ 倍で働く.} \\ V_g^\pi \text{ は実ベクトル束で, } g \text{ は } (-1) \text{ 倍で働く.} \end{array} \right)$$

ここで実ベクトル束 τM^g , V_g^π の Pontryagin 類を形式的に

$$p(\tau M^g) = \prod (1 + x_j^2), \quad p(V_g^\pi) = \prod (1 + y_j^2)$$

とおく時, 特性類 $\mathcal{Q}(M^g)$, $\mathcal{R}(V_g^\pi)$ と

$$\mathcal{I}(M^g) = \mathcal{I}(\tau M^g \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \prod_j \left(\frac{z_j}{1 - e^{-z_j}} \cdot \frac{-z_j}{1 - e^{z_j}} \right)$$

$$\mathcal{R}(V_j^\pi) = \prod_j \left(\frac{z}{1 + e^{z_j}} \cdot \frac{z}{1 + e^{-z_j}} \right)$$

で定義し, 複素ベクトル束 V_j^θ ($0 < \theta < \pi$) の Chern 類と形式的に

$$c(V_j^\theta) = \prod_j (1 + z_j)$$

と置く時, 特性類 $\mathcal{S}^\theta(V_j^\theta)$ と

$$\mathcal{S}^\theta(V_j^\theta) = \prod_j \left(\frac{1 - e^{i\theta}}{1 - e^{z_j + i\theta}} \cdot \frac{1 - e^{-i\theta}}{1 - e^{-z_j - i\theta}} \right)$$

で定義する. この時特性類 $\mathcal{I}^g(M)$ は

$$\mathcal{I}^g(M) = \det_{\mathbb{R}}(1 - g|_{V_g})^{-1} \mathcal{R}(V_g^\pi) \prod_{0 < \theta < \pi} \mathcal{S}^\theta(V_g^\theta) \mathcal{I}(M^g)$$

で定義される. 但し $g|_{V_g}$ は法束 V_g への g の作用を表わす線型変換で, g は V_g 上固有値 1 を持ちぬから, $1 - g|_{V_g}$ は可逆である.

ここで我々は G -不変断面への働く作用素

$$P^G : C^\infty(M; E)^G \longrightarrow C^\infty(M; F)^G$$

の指数を考える。不変断面 $\sigma : M \rightarrow E$ は軌道空間上の断面
 $\sigma : G \backslash M \rightarrow G \backslash E$ により一意的に定まらる。 P^G は
 軌道空間 $G \backslash M$ 上の作用素と考えられることに注意する。我々
 は後にこの視点で以下の結果と一般化するであろう。

G の既約指標の正規直交性により、

$$\begin{aligned} \text{ind } P^G &= \dim [\text{Kernel } P^G] - \dim [\text{Cokernel } P^G] \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\text{ind}_G P)(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (-1)^{\dim M^g} \langle \text{ch}^g[\sigma(P)] \mathcal{Q}^g(M), [\tau M^g] \rangle \end{aligned}$$

を得る。今 $h \in G$ に対して、 $h \cdot M^g = M^{hg^{-1}}$ 、 $h^*(\text{ch}^{hg^{-1}}[\sigma(P)] \cdot \mathcal{Q}^{hg^{-1}}(M)) = \text{ch}^g[\sigma(P)] \mathcal{Q}^g(M)$ だから、上式は G の元
 の共役類毎に和をとった方が合理的である。 $g \in G$ の共役類
 (g) の元の個数は $|G|/|Z_G(g)|$ ($Z_G(g)$ は元 g の G の中で
 の中心化群) だから、

$$\text{ind } P^G = \sum_{(g) \in (G)} \frac{(-1)^{\dim M^g}}{|Z_G(g)|} \langle \text{ch}^g(\sigma(P)) \ell^g(M), [\tau M^g] \rangle$$

となる. ここで $\text{ch}^g(\sigma(P)) \ell^g(M)$ は群 $Z_G(g)$ の作用で不動元, すなわち, $H_c^*(Z_G(g) \backslash \tau M^g; \mathbb{C})$ の元と考えるから, 積分と軌道空間 $Z_G(g) \backslash \tau M^g$ 上でとることが出来る. この時, $Z_G(g)$ は τM^g 上効果的に作用しているから, 重複度 $m_G(M_i^g)$ と M^g の連結成分 M_i^g に対して

$$m_G(M_i^g) = \# \{ h \in Z_G(g) \mid hx = x \ \forall x \in M_i^g \}$$

と書くことが出来る.

$$\text{ind } P^G = \sum_{\substack{(g) \in (G) \\ M_i^g \subset M^g}} \frac{(-1)^{\dim M_i^g}}{m_G(M_i^g)} \langle \text{ch}^g(\sigma(P)) \ell^g(M), [Z_G(g) \backslash \tau M_i^g] \rangle$$

と書くことが出来る. 更に同型,

$$H_c^*(Z_G(g) \backslash \tau M^g; \mathbb{C}) \cong H_{Z_G(g), c}^*(\tau M^g; \mathbb{C})$$

に注意すると, 特性類 $\text{ch}^g(\sigma(P)) \ell^g(M) \in H_c^*(Z_G(g) \backslash \tau M^g; \mathbb{C})$

は全く同じ式で定義した同変特性類

$$ch_G^g[\sigma(P)] \cdot \mathcal{J}_G^g(M) \in H_{Z_G(g)}^*(\tau M^g; \mathbb{C}),$$

$$\int ch_G^g[\sigma(P)] = \sum_{0 \leq \theta < 2\pi} ch_{Z_G(g)}^0(u_g^\theta)$$

$$\mathcal{J}_G^g(M) = \det_R(1 - g|_{V_g}) R_{Z_G(g)}(V_g^\pi) \prod_{0 \leq \theta < \pi} \mathcal{S}_{Z_G(g)}^0(v_g^\theta) \mathcal{J}_{Z_G(g)}(M^g)$$

と一致することがわかる。したがって、我々の

$$\text{ind } P^G = \sum_{\substack{(g) \in (G) \\ M_i^g \subset M^g}} \frac{(-1)^{\dim M_i^g}}{m_G(M_i^g)} \langle ch_G^g[\sigma(P)] \mathcal{J}_G^g(M), [Z_G(h) \setminus \tau M_i^g] \rangle$$

を得ることができた。

2. Compact Lie 群の場合 (横断的楕円型作用素の指数)

G を Compact Lie 群, M を G が滑らかに作用している閉多様体とする. 我々は G -不変擬微分作用素 $P: C^\infty(M; E) \rightarrow C^\infty(M; F)$ に対し, G -不変断面に働く作用素 $P^G: C^\infty(M; E)^G \rightarrow C^\infty(M; F)^G$ の指数

$$\text{ind } P^G = \dim [\text{Kernel } P^G] - \dim [\text{Coker } P^G]$$

を考えたい. この指数は P が楕円型の時にはもちろん意味をもつが, そうでなくとも意味をもつことがある. $T^*_G M$ と T^*M の部分集合で, G の軌道に沿ったベクトルを零化するような余ベクトルの全体とする. P の主表象 $\sigma(P)$ が, $T^*_G M - M$ に制限した時可逆になるような P を横断的楕円型作用素と呼ぶ.

これは P を各点の切片 (slice) S_x に制限した時, 楕円型になる事があり, 軌道空間 $G \backslash M$ 上楕円型であると呼ばれるにふさわしい. このような作用素 P について, $\text{ind } P^G$ は有限の値をとるのであるが, Atiyah [401] はもっと強く, 次の事を示している.

$P: C^\infty(M; E) \rightarrow C^\infty(M; F)$ を横断的楕円型作用素とする. P の核 $N(P)$ と余核 $N^*(P)$ は適当に完備化することにより, G の unitary 表現を考えることができた. この時 G の各既約表

現 p に対して, $N(p)$, $N^*(p)$ の p -成分 $N(p)_p$, $N^*(p)_p$ は有限次元になり, その指標の和

$$\text{char } N(p) = \sum_{p \in \hat{G}} \text{char } N(p)_p, \quad \text{char } N^*(p) = \sum_{p \in \hat{G}} \text{char } N^*(p)_p$$

は G 上の超函数として収束する. この意味で, G -指数

$$\text{ind}^G p = \text{char } N(p) - \text{char } N^*(p) \in \mathcal{D}'(G)$$

が定義される. この指数は p の主表象の $\tau_G^*(M)$ への制限 $\sigma(p)|_{\tau_G^* M}$ の安定同値類にしか依らず, $R(G)$ -準同型

$$\text{ind}^G : K_G(\tau_G^* M) \longrightarrow \mathcal{D}'(G)$$

を定める. $\text{ind } p^G$ との関係は, 既約指標の正規直交性により,

$$\text{ind } p^G = \langle \text{ind}^G p, 1_G \rangle$$

で与えられる. (1_G は G 上 1 の定数函数).

今までの一般的な仮定の下で, $\text{ind } p^G$ 或いは $\text{ind}^G p$ と具体的に書き表わすことは非常に複雑で, 実際的でない. Atiyah [40]

で述べられているのは、 G が torus T^l で、 T への isotropy 群が有限群の時だけである。我々はここで、 G が一般の Compact Lie 群で、 T への isotropy 群が有限の時に、and P^G と前節と同様の形に書き表わす事を試みる。この仮定の下では $\tau_G M$ は τM の部分束で、 G の次元だけ次元が下がっている事に注意する。

前節の最後の式と今の仮定の下で一般化するには、軌道空間 $G \backslash M$ に着目するのが適切である。 $G \backslash M$ は局所的には $G_2 \backslash S_2$ で多様体 / 有限群の形としている。そこで極を計る対象はジークルとして $[Z_G(g) \backslash \tau_{Z_G(g)} M^g]$ とする。この時、isotropy 群は有限だから同型 $H_c^*(Z_G(g) \backslash \tau_{Z_G(g)} M^g; \mathbb{C}) \cong H_{Z_G(g), c}^*(\tau_{Z_G(g)} M^g; \mathbb{C})$ があり、特性類は $H_{Z_G(g), c}^*(\tau_{Z_G(g)} M^g; \mathbb{C})$ の元であるべきである。実際 $u \in K_G(\tau_G M)$ に対して、 $u|_{\tau_{Z_G(g)} M^g}$ は、 $Z_G(g)$ -同変ベクトル束として

$$u|_{\tau_{Z_G(g)} M^g} = \bigoplus_{0 \leq \theta < 2\pi} u_g^\theta$$

と分解するから、 $ch_G^g(u) \in H_{Z_G(g), c}^*(\tau_{Z_G(g)} M^g; \mathbb{C})$ が定義される。また $\tau_G M|_{M^g}$ は $Z_G(g)$ -同変に

$$\tau_G M|_{M^g} = \tau_{Z_G(g)} M^g \oplus \bigoplus_{0 < \theta \leq \pi} V_{g, G}^\theta$$

と分解するから, $J_G^g(M) \in H_{\Sigma_G(g)}^*(M^g; \mathbb{C})$ も定義できる.

定理 G は compact Lie 群, M は G が滑らかに作用している閉多様体で, すべての isotropy 群が有限となる. その時 $u \in K_G(\tau_G M)$ に対して,

$$\langle \text{ind}^G u, 1_G \rangle = \sum_{\substack{g \in (G), M^g \neq \emptyset \\ M_i^g \subset M^g}} \frac{(-1)^{\dim(\Sigma_G(g) \setminus M_i^g)}}{m_G(M_i^g)}$$

$$\times \langle \text{ch}_G^g(u) \ell_G^g(M), [\Sigma_G(g) \setminus \tau_{\Sigma_G(g)} M^g] \rangle.$$

証明の方針 Atiyah は [401] に於て, $G = T^l$ の時にこの式を証明している. 我々は G が連結の時に, G の極大 torus T に関して, Atiyah の結果と適用して, 結果を得よう. G が連結でない時には, 後に述べる V -多様体の結果と通じて証明される.

G は compact connected Lie 群, $T^l \subset G$ は 1 つの極大 torus とする. 旗多様体 G/T に G -不変な複素多様体の構造を入れこく.

今ベクトル束の同型

$$G \times_T \tau_T M \cong \tau_G(G \times_T M) \cong \tau_G(G/T \times M) \cong \tau(G/T) \times \tau_G M$$

により同型

$$K_T(\tau_T M) \cong K_G(G \times_T \tau_T M) \cong K_G(\tau(G/T) \times \tau_G M)$$

が得られるが, $u \in K_G(\tau_G M)$ に対し, 左辺の元 $ru \in K_T(\tau_T M)$ と $[2] \times u \in K_G(\tau(G/T) \times \tau_G M)$ で定義する. この時, G/T の算術種数が 1 であることから, (これは Atiyah [401] に於て)

$$\langle \text{ind}^G u, 1_G \rangle = \langle \text{ind}^T ru, 1_T \rangle$$

が得られ, 右辺は Atiyah の結果から計算することから得られる.

計算に於て, 次の事実が重要である. $h \in T$ に対して同変剰余 Todd 類 $\mathcal{T}_G^h(G/T) \in H_{\Sigma_G(h)}^{**}((G/T)^h; \mathbb{C})$ が得られる. これは $(G/T)^h$ 上の何れも二つの類 $\pi_! \mathcal{T}_G^h(G/T) \in H_{\Sigma_G(h)}^{**}(\text{pt}; \mathbb{C})$ は $\equiv 1$ である. これは Borel-Hirzebruch の結果 $\pi_! \mathcal{T}_G(G/T) \equiv 1 \in H_G^{**}(\text{pt}; \mathbb{C})$ と同じ方法で証明される.

3. V -多様体上の楕円型作用素の指数

はじめに V -多様体と V -束の定義を述べよう. X を paracompact Hausdorff 空間とする. X が V -多様体であるとは, 各点 $x \in X$ の十分小さい近傍 U_x に対して, 有限群 G_x と G_x の効果的な実表現空間の原点の近傍 \tilde{U}_x と, $U_x \subset X$ と軌道空間 $G_x \backslash \tilde{U}_x$ の間の同一視 $U_x \cong G_x \backslash \tilde{U}_x$ が与えられていて, 各 $y \in U_x$ に対して, U_y は U_x に含まれるように十分小さくとると, 開埋蔵 $\varphi: \tilde{U}_y \rightarrow \tilde{U}_x$ が存在して, 包含 $U_y \subset U_x$ と被っている時である. φ が微分同型になっている時を考える (C^∞ - V -多様体). このような φ の選ぶ方は \tilde{U}_x 上の G_x の作用を除いて唯一つに定まる. 各 φ は群の準同型 $\lambda_\varphi: G_y \rightarrow G_x$ を定め, φ は λ_φ -同変になる.

V -多様体の例としては, 前節で考えたすべての isotropy 群が有限であるような G -多様体 (G, M) の軌道空間 $G \backslash M$ とともに伴う軌道空間 $\Sigma_G(y) \backslash M^g$ とか, 固有不連続群 (Γ, \tilde{X}) の軌道空間 $\Gamma \backslash \tilde{X}$ 等が考えられる.

V -多様体 X 上の V -束とは, 同変繊維束の族 $\{G_x, \tilde{E}_x \rightarrow \tilde{U}_x\}$ と接着束写像 $\pm: \tilde{E}_y \rightarrow \tilde{E}_x$ ($\varphi: \tilde{U}_y \rightarrow \tilde{U}_x$ と被っている λ_φ -同変束写像) からできている. 両立性条件 $\pm: \tilde{E}_x \rightarrow \tilde{E}_y$, $\pm: \tilde{E}_y \rightarrow \tilde{E}_x \Rightarrow \pm \circ \pm$ は接着束写像と満たしているものである. 例としては接ベクトル V -束 $\{G_x, \tau \tilde{U}_x \rightarrow \tilde{U}_x\}$ を挙げよう.

V -束 $\{G_x: \tilde{E}_x \rightarrow \tilde{U}_x\}$ に対して軌道空間の族 $\{G_x \backslash \tilde{E}_x\}$ と接着

束写像で貼り合わせた空間 $E = (\cup G_x \backslash \tilde{E}_x) / \sim$ は V -多様体になり V -束の全空間と呼ぶ。また射影 $E \rightarrow X$ も定義される。

ベクトル V -束 $\tau_V X$ の同伴主 V -束と考える。構造群は $O(n)$ としてよいが、ここでは適当な連結な Compact 群 G に拡大或いは制限しておく。同伴主 V -束 $G(\tau_V X)$ の全空間と考える。局所的には $G_x \backslash G(\tau U_x)$ だが、 G_x は $G(\tau U_x)$ 上自由に作用していることは注意する。従って、全空間 $G(\tau_V X)$ は滑らかな多様体になる。この時 G は全空間に右から作用しているが、isotropy 群は点 $x \in X$ 上 G_x に同型である。そして V -多様体として X は軌道空間 $G(\tau_V X) / G$ に自然に同一視される。また、すべての V -多様体 X は、ある G -多様体 M の軌道空間になり、 G は Compact 連結群、すべての isotropy 群は有限、そして主軌道型は自明としてよい。

一般に V -束 $E \rightarrow X$ に対し、位相的断面 $\sigma: X \rightarrow E$ が、各 U_x に打して、滑らかな不変断面 $\hat{\sigma}_x: \tilde{U}_x \rightarrow \tilde{E}_x$ で覆われる時、 σ を滑らかな V -断面と呼ぶ。ベクトル V -束 $E \rightarrow X$ において滑らかな V -断面の全体 $C_V^\infty(X; E)$ はベクトル空間になる。線型写像 $P: C_V^\infty(X; E) \rightarrow C_V^\infty(X; F)$ が、平滑化作用素と称して局所的に(楕円型)擬微分作用素で表わされる時、 P を(楕円型)擬微分作用素と呼ぶことになる。

Compact な V -多様体 X 上の楕円型作用素 P の指数

$$\text{ind}_V P = \dim [\text{Ker} P] - \dim [\text{Coker} P]$$

は有限にあり, 主表象のみで定まることかわかる. 接ベクトル V -束 $\tau_V X$ 上の台 Compact な差複素ベクトル V -束の安定同値類のつくる群を $K_V(\tau_V X)$ と書く時, 準同型

$$\text{ind}_V : K_V(\tau_V X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

が得られる.

V -多様体 X が, すべての isotropy 群が有限, 主軌道型が自明な G -多様体 M の軌道空間 $G \backslash M$ となっている時, 自然に X 上のベクトル V -束 E と M 上の G -同変ベクトル束 \widehat{E} は一対一に対応するから, $C_V^\infty(X; E) = C^\infty(M; \widehat{E})^G$, $K_V(\tau_V X) \cong K_G(\tau_G M)$ となる. この時 $u \in K_V(\tau_V X) = K_G(\tau_G M)$ に対して,

$$\text{ind}_V u = \langle \text{ind}^G u, 1_G \rangle$$

が成立し, 前節の結果より, $\text{ind}_V u$ と書き表わすことができる. この時, 前節の定理の式の右辺を V -多様体の言葉で書き直してみよう.

まず積分をとるときは、 $\tau_V X = G \setminus \tau_G M$ ばかりでなく、
 すべての $\Sigma_G(g) \setminus \tau_{\Sigma_G(g)} M^g$ にわたっていさるから、 V -多様体 X に
 対して、積分をとるべき物を構成しなくてはならない。これは
 すべての $g \in G_x$ に対して、 \bar{U}_x^g と合わせたものである。
 今、 $(1), (h_x^1), \dots, (h_x^{p_x})$ と G_x のすべての共役類とする。すると
 自然に

$$\{(y, (h_y^j)) \mid y \in U_x, j=1, \dots, p_x\} \cong \coprod_{i=1}^{p_x} \Sigma_{G_x}(h_x^i) \setminus \bar{U}_x^{h_x^i}$$

が得られる。そこで、

$$\Sigma X = \{(x, (h_x^i)) \mid x \in X, G_x \neq \{1\}, i=1, \dots, p_x\}$$

とみると、 ΣX は自然に $\bar{U}_x^{h_x^i} \rightarrow \Sigma_{G_x}(h_x^i) \setminus \bar{U}_x^{h_x^i}$ と局所座標
 をもつ V -多様体になる。ここで $\Sigma_{G_x}(h_x^i)$ の $\bar{U}_x^{h_x^i}$ への作用は効果
 的であるので、自明に作用している部分群の位数と、 ΣX の
 X の中での点 $(x, (h_x^i))$ に於ける重複度を定義する。 ΣX は一般
 には色々な次元をもつ V -多様体の並置である。 $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_c$
 と ΣX の連結成分をしよう。すると各 Σ_i に対して重複度 m_i が
 定まっている。 $X = G \setminus M$ の時は、自然に、

$$\left\{ \begin{array}{l} \coprod_{(g) \in (G)} \Sigma_g(g) \setminus M^g \cong X \amalg \Sigma X \\ m_G(M_i^g) = m_i \end{array} \right.$$

が成立している。

ΣX の各局所座標 \tilde{U}_x^h に対し, 法束 $\nu(\tilde{U}_x^h)$, 接束 $\tau(\tilde{U}_x^h)$ があり, 更に法束上には h の作用による固有空間分解 $\nu(\tilde{U}_x^h) = \bigoplus_{0 < \theta \leq \pi} \nu_h^\theta$ が得られる. 今これらのベクトル束に接着字像と両立する不変接続を入れよることにより特性形式の族

$$\mathcal{J}^h(\tilde{U}_x) \in \Omega^*(\tilde{U}_x^h) \text{ の } \mathbb{C}$$

が得られる. これらの形式は, cohomology 類

$$\mathcal{J}^h(X) \in H^*(\Sigma X; \mathbb{C}) \text{ 及び } \mathcal{J}(X) \in H^*(X; \mathbb{Q}) (h=1)$$

を定義しているが, これは前節の同変特性類に対応している.

また $u \in K_V(\tau_V X)$ に対しても, 複素ベクトル V -束で代表させ, 適当に不変接続を入れれば, 特性形式

$$\mathrm{ch}^h(E) - \mathrm{ch}^h(F) \in \Omega^*(\tau \bar{O}_X^h) \text{ の } \mathbb{C}$$

及び cohomology 類

$$\mathrm{ch}^\Sigma(u) \in H_c^*(\tau_v(\Sigma X); \mathbb{C}), \quad \mathrm{ch}(u) \in H_c^*(\tau_v X; \mathbb{Q})$$

が得られ、前節の同変特性類に対応している。

従って次の定理が得られた。

定理: X は compact V -多様体とする。 $u \in K_v(\tau_v X)$ に対して。

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}_V(u) &= (-1)^{\dim X} \langle \mathrm{ch}(u) l(X), [\tau_v X] \rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^c \frac{(-1)^{\dim \Sigma_i}}{m_i} \langle \mathrm{ch}^\Sigma(u) l^\Sigma(X), [\tau_v \Sigma_i] \rangle \end{aligned}$$

が成り立つ。

参考文献

[Atiyah 401] : Elliptic operators and compact groups
Lec. Notes in Math. 401, Springer-Verlag 1974.

T. Kawasaki : The index of elliptic operators over V -manifold,
to appear.